

Détermination de la traînée engendrée par une sphère fluide en translation

A. Saboni^{a,*}, S. Alexandrova^a, C. Gourdon^b

^a Groupe Ecoulements et Transferts, LTP, Dépt. GTE, Université de Caen, 120 rue de l'Exode, 50000 Saint-Lô, France

^b Laboratoire de Génie Chimique, ENSIACET, 118 Route de Narbonne, 31077 Toulouse Cedex 4, France

Accepted 31 July 2003

Abstract

L'écoulement permanent, bidimensionnel et incompressible autour et à l'intérieur d'une sphère fluide est considéré. Les équations de Navier–Stokes sont exprimées en termes de fonction courant et du rotationnel et résolues numériquement en utilisant la technique des différences finies. Les effets du nombre de Reynolds et du rapport des viscosités entre les phases dispersée et continue sur les caractéristiques de l'écoulement sont étudiés. Les résultats sont présentés sous forme de champ de fonction courant, de coefficients de traînée pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à $Re = 400$ et un rapport des viscosités κ compris entre 0 et 1000. Les deux cas extrêmes $\kappa = 0$ et 1000 sont en bon accord avec les études précédentes concernant l'écoulement autour d'une bulle sphérique et d'une sphère rigide. A partir des résultats numériques une équation prédictive pour le coefficient de traînée est proposée, elle est valable pour des nombres de Reynolds inférieurs à 400 et pour n'importe quel rapport des viscosités entre les phases dispersée et continue.

© 2003 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Sphère fluide; Navier–Stokes; Coefficient de traînée

1. Introduction

La connaissance des phénomènes de base impliqués entre une sphère fluide et un écoulement externe est importante pour la compréhension des systèmes liquide–liquide, solide–liquide et gaz–liquide dans les domaines du génie chimique, pétrochimique ou biochimique ainsi que dans le domaine du génie de l'environnement. Bien qu'aucune intention d'étudier le transfert de chaleur ou de matière entre des inclusions et un écoulement externe ne soit faite ici, il faut mentionner que l'hydrodynamique influence fortement le taux de transfert [1–6]. La structure de l'écoulement dépend des nombres de Reynolds, intérieur et extérieur, qui sont reliés entre eux par le rapport des viscosités ($\kappa = \mu_d/\mu_c$) et le rapport des masses volumiques ($\gamma = \rho_d/\rho_c$) entre la phase dispersée et la phase continue. Les écoulements autour et à l'intérieur d'une sphère fluide se déplaçant avec une vitesse terminale de chute ont été obtenus analytiquement par Hadamard [7] et Rybczynski [8] pour l'écoulement rampant ($Re \rightarrow 0$). Pour des nombres de Reynolds plus élevés, les solutions analytiques n'existent pas et des solutions numériques doivent être envisagées. Quand $\kappa \rightarrow \infty$, ce problème correspond à l'écoulement

visqueux autour d'une particule rigide et a été étudié par plusieurs auteurs [9–13]. Quand $\kappa = 0$, ce problème correspond à l'écoulement visqueux autour d'une bulle sphérique et a été étudié aussi par plusieurs auteurs [14–20]. Les phénomènes significatifs sont très bien expliqués dans les livres de Clift et al. [1] et de Sadhal et al. [6]. Pour des rapports des viscosités intermédiaires, la résolution des équations de Navier–Stokes est plus difficile à cause du couplage de l'écoulement à l'intérieur et autour de la sphère fluide et peu d'études existent. Abdel-Alim et Hamielec [21] ont employé une méthode de différences-finies. La résolution a été effectuée pour des nombres de Reynolds inférieurs à 50 et pour des rapports des viscosités κ inférieurs à 1.4. Ce travail a été étendu à des nombres de Reynolds plus élevés ($Re < 200$) par Rivkind et Ryskin [22] et Rivkind et al. [23]. Oliver et Chung [17] ont employé une méthode différente (développements en série de fonctions de Legendre) pour des nombres de Reynolds modérés ($Re < 50$).

Dans cette étude, nous résolvons les équations de Navier–Stokes, à l'intérieur et autour d'une sphère fluide, pour des nombres de Reynolds inférieurs à 400 et des rapports des viscosités allant jusqu'à 1000. Les nombres de Reynolds à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère sont reliés par $Re = \kappa/\gamma Re_d$. Le rapport des masses volumiques n'a qu'une influence négligeable sur le coefficient de traînée (Clift et al. [1]) c'est pour cela que dans toutes les simulations il est fixé à l'unité. A partir des résultats

* Corresponding author. Tel.: +33-2-33-77-11-72;

fax: +33-2-33-77-11-78.

E-mail address: asaboni@aol.com (A. Saboni).

Nomenclature

a	rayon de la sphère
C_D	coefficient de traînée totale
C_{DF}	coefficient de traînée visqueuse
C_{DP}	coefficient de traînée de pression
d	diamètre de la sphère
P	pression
Re	nombre de Reynolds
u	vitesse
u_∞	vitesse terminale de chute
u_r, u_θ	composantes du vecteur vitesse
z	coordonnée logarithmique radiale

Greek letters

$\delta r, \delta \theta$	pas d'espace du maillage
γ	rapport des masses volumiques
κ	rapport des viscosités
μ	viscosité dynamique
ν	viscosité cinématique
ρ	masse volumique
ω	vecteur rotationnel
ψ	fonction courant

Subscripts

c	relatif à la phase continue
d	relatif à la phase dispersée
∞	loin de la surface de la sphère

numériques, une équation prédictive pour les coefficients de traînée est proposée, elle est plus générale que les corrélations existantes et peut être utilisée pour des nombres de Reynolds inférieurs à 400 et pour n'importe quel rapport des viscosités κ .

2. Formulation du problème

Dans cette étude nous considérons l'écoulement permanent, axisymétrique, laminaire et incompressible autour d'une sphère fluide à sa vitesse terminale de chute U_∞ . Puisque l'écoulement est considéré axisymétrique, les équations de Navier–Stokes peuvent être écrites en termes de fonction courant et du rotationnel (ψ et ω) en coordonnées sphériques (Clift et al. [1], Sadhal et al. [6]). En utilisant les variables sans dimension $r = r^*/a$, $\omega = \omega^*a/U_\infty$, $\psi = \psi^*/(U_\infty a^2)$ et le nombre de Reynolds défini par $Re = 2aU_\infty/\nu_c$, les équations satisfaites par ψ et ω sont données par:

$$E^2 \psi_d = \omega_d r \sin \theta \quad (1)$$

$$\frac{\mu_c \rho_d Re}{\mu_d \rho_c} \frac{Re}{2} \left[\frac{\partial \psi_d}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\omega_d}{r \sin \theta} \right) - \frac{\partial \psi_d}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega_d}{r \sin \theta} \right) \right] \sin \theta = E^2 (\omega_d r \sin \theta) \quad (2)$$

où

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

les composantes de vitesse sont données par:

$$u_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Autour de la sphère fluide, les équations ci-dessus sont encore valables, mais pour des raisons numériques discutées plus tard la coordonnée radiale est transformée par l'intermédiaire de $r = e^z$, où z est la coordonnée logarithmique radiale. Le système d'équations obtenu est le suivant:

$$E^2 \psi_c = \omega_c r \sin \theta \quad (3)$$

$$\frac{Re}{2} \left[\frac{\partial \psi_c}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\omega_c}{e^z \sin \theta} \right) - \frac{\partial \psi_c}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\omega_c}{e^z \sin \theta} \right) \right] e^z \sin \theta = e^{2z} E^2 (\omega_c e^z \sin \theta) \quad (4)$$

Les conditions aux limites à satisfaire sont: (i) loin de la sphère fluide ($z = z_\infty$), l'écoulement parallèle est supposé: $\omega_c = 0$; $\psi_c = 0.5e^{2z} \sin^2 \theta$, (ii) le long de l'axe de symétrie ($\theta = 0, \pi$): $\psi_c = 0$, $\omega_c = 0$, $\psi_d = 0$, $\omega_d = 0$, (iii) à l'interface ($z = 0$ ou $r = 1$), les relations suivantes tiennent compte, respectivement: du transfert de matière négligeable, de la continuité des vitesses tangentielles et de la continuité du cisaillement:

$$\psi_c = 0; \quad \psi_d = 0; \quad \frac{\partial \psi_c}{\partial z} = \frac{\partial \psi_d}{\partial r};$$

$$\frac{\mu_c}{\mu_d} \left(\frac{\partial^2 \psi_c}{\partial z^2} - 3 \frac{\partial \psi_c}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2 \psi_d}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial \psi_d}{\partial r} \right)$$

La pression surfacique et le coefficient de traînée sont obtenus en intégrant les composantes appropriées [6]. La pression au point d'arrêt et la pression à la surface de la sphère sont obtenues à partir des relations (5) et (6):

$$P_0 = \frac{8}{Re} \int_1^{r_\infty} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)_{\theta=0^\circ} \frac{dr}{r} \quad (5)$$

$$P_\theta = P_0 + \frac{4}{Re} \int_0^\theta \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \right)_{r=1} d\theta - (u^2)_{r=1} \quad (6)$$

Le coefficient de traînée visqueuse et le coefficient de traînée de pression sont calculés par:

$$C_{DF} = \frac{4}{Re} \int_0^\pi \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \omega \cot g \theta \right)_{r=1} \sin(2\theta) d\theta \quad (7)$$

$$C_{DP} = \int_0^\pi P_\theta \sin(2\theta) d\theta \quad (8)$$

Le coefficient de traînée totale est la somme de ces deux contributions:

$$C_D = C_{DP} + C_{DF} \quad (9)$$

3. Procédure de résolution

Le problème d'un point de vue numérique est de résoudre les Eqs. (1)–(4) pour la fonction courant et le champ de vorticité à l'intérieur et l'extérieur de la sphère fluide. La méthode des différences finies est employée dans cette étude. Un maillage avec un pas radial constant Δr et un pas tangential constant $\Delta\theta$ est employé à l'intérieur de la sphère fluide. Cependant autour de la sphère il est souhaitable d'avoir une maille plus fine près de la sphère où les gradients sont forts. Pour ceci la transformation $r = \exp(z)$ est employée. Alors, le maillage dans la phase continue est produit avec un espacement uniforme selon z et selon θ . Les équations de la fonction courant sont résolues en utilisant la méthode SOR (sur-relaxations successives), les équations de la vorticité sont résolues en utilisant une méthode implicite à direction alternée (ADI). Pour obtenir des résultats stables, précis et en utilisant un temps de calcul minimal, la sélection du maillage a été obtenue en s'inspirant des études antérieures (sphère rigide et bulle) et en faisant des tests avec des maillages différents. Pour $Re < 100$, le domaine de calcul a été discrétisé en 61 points selon la direction radiale à l'intérieur de la sphère fluide, 101 points selon la direction radiale à l'extérieur de la sphère fluide et 61 points selon la direction tangentielle à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère fluide. Pour des nombres de Reynolds plus grands ($100 < Re < 400$), un maillage plus fin était nécessaire. Dans ce cas le domaine de calcul a été discrétisé en 61 points selon la direction radiale à l'intérieur de la sphère fluide, 401 points selon la direction radiale à l'extérieur de la sphère fluide et 91 points selon la direction tangentielle à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère fluide. D'autre part la valeur du rayon maximum (r_∞) délimitant la zone fluide examinée a été fixée à

200 fois le rayon de la sphère fluide pour les nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité et à 12 fois le rayon de la sphère fluide pour les nombres de Reynolds supérieurs à 10 pour lesquels l'épaisseur de la couche limite est beaucoup plus faible.

4. Résultats et discussion

Nous avons limité notre étude à l'écoulement axisymétrique autour d'une particule sphérique. Nous considérons des nombres de Reynolds ne dépassant pas 400, ce nombre de Reynolds est la limite supérieure pour laquelle l'écoulement est axisymétrique dans le cas de la sphère rigide et pour laquelle une bulle d'air dans l'eau reste quasi-sphérique. Nous avons obtenu des solutions pour les nombres de Reynolds inférieurs à 400 et un rapport des viscosités compris entre 0 et 1000.

Afin de vérifier la méthode de résolution, les résultats obtenus pour les deux cas extrêmes ($\kappa = 0$ et 1000) sont comparés aux résultats de la littérature. Dans le cas de l'écoulement autour d'une bulle ($\kappa = 0$), les valeurs du coefficient de traînée sont comparées aux résultats obtenus par Leclair et Hamielec [15], Brabston et Keller [14], Ryskin et Leal [16], Magnaudet et al. [18], Blanco et Magnaudet [19] et Raymond [20]. Dans le cas $\kappa = 1000$, correspondant à un écoulement autour d'une sphère ayant une interface presque immobile (rigoureusement la sphère rigide correspond à $\kappa = \infty$), nos résultats sont comparés à ceux de Leclair et al. [10], Alassar et al. [13], Feng et Michaelides [5] et Magnaudet et al. [18]. Les résultats obtenus pour le coefficient de traînée et les résultats de la littérature sont donnés dans les Tables 1 and 2 qui montrent une bonne concordance entre nos résultats et ceux des études antérieures.

Table 1
Valeurs du coefficient de traînée C_d , dans le cas d'une bulle

Auteurs	Re									
	1	10	20	30	50	100	200	300	400	
Blanco et Magnaudet [19]	–	–	–	–	0.664	0.369	0.200	0.138	0.104	
Brabston et Keller [14]	17.59	2.35	1.362	–	–	–	0.197	–	–	
Magnaudet et al. [18]	17.44	2.411	1.322	–	–	0.369	0.200	0.138	–	
Raymond [20]	–	–	1.380	–	0.661	0.364	–	–	–	
Ryskin et Leal [16]	17.50	2.430	1.410	–	0.670	0.380	0.220	–	–	
Ce travail ($\kappa = 0$)	17.58	2.490	1.429	1.035	0.690	0.391	0.206	0.143	0.108	

Table 2
Valeurs du coefficient de traînée C_d , dans le cas d'une sphère rigide

Auteurs	Re									
	1	10	20	30	50	100	200	300	400	
Feng et Michaelides [5]	26.97	–	2.682	–	–	1.095	–	–	–	
Rimon et Cheng [9]	–	4.398	–	–	–	1.014	0.727	0.610	–	
Leclair et al. [10],	27.37	4.337	2.736	2.126	–	1.096	0.772	0.632	0.552	
Magnaudet et al. [18]	27.54	4.317	2.707	–	–	1.092	0.765	0.645	–	
Ce travail ($\kappa = 8$)	27.55	4.424	2.768	2.148	1.589	1.084	0.776	0.629	0.534	

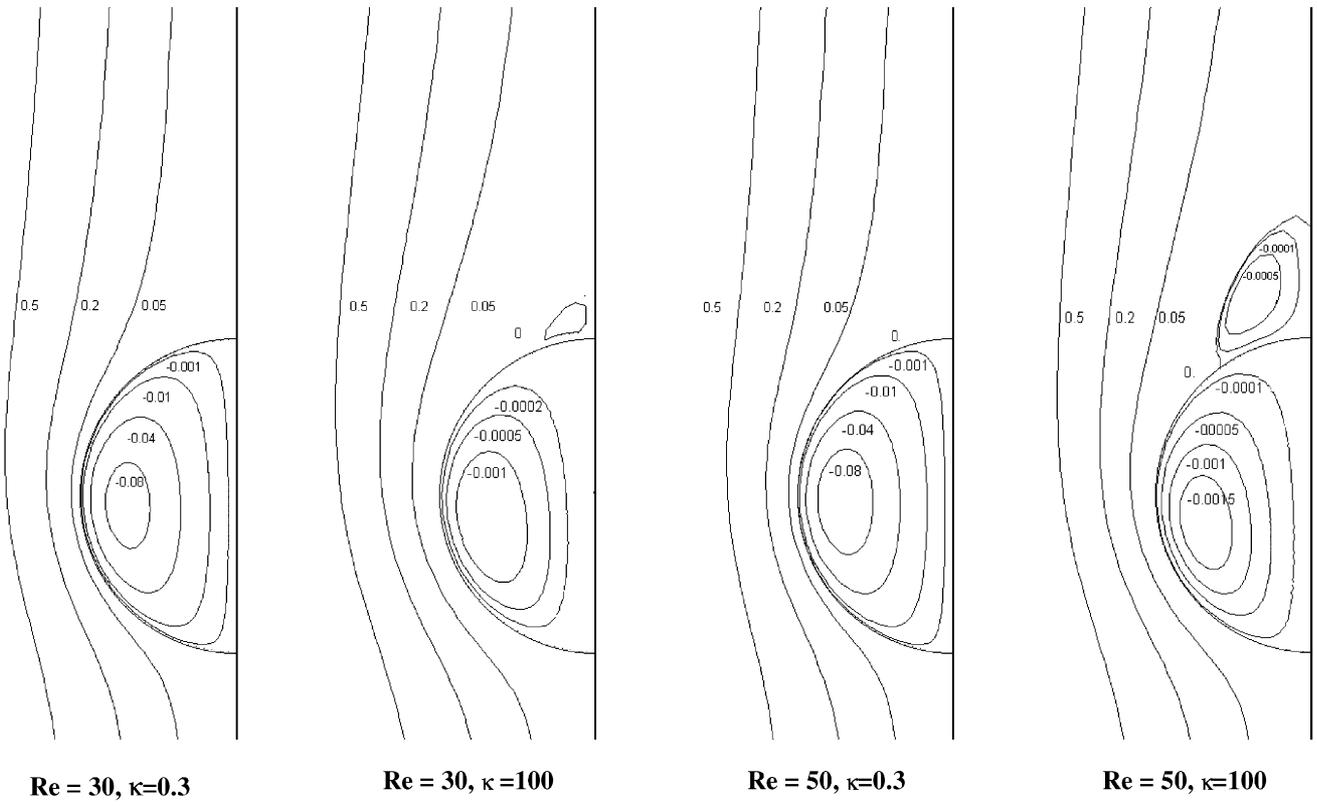


Fig. 1. Champs de fonction courant à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère fluide, $Re = 30$ et 50 .

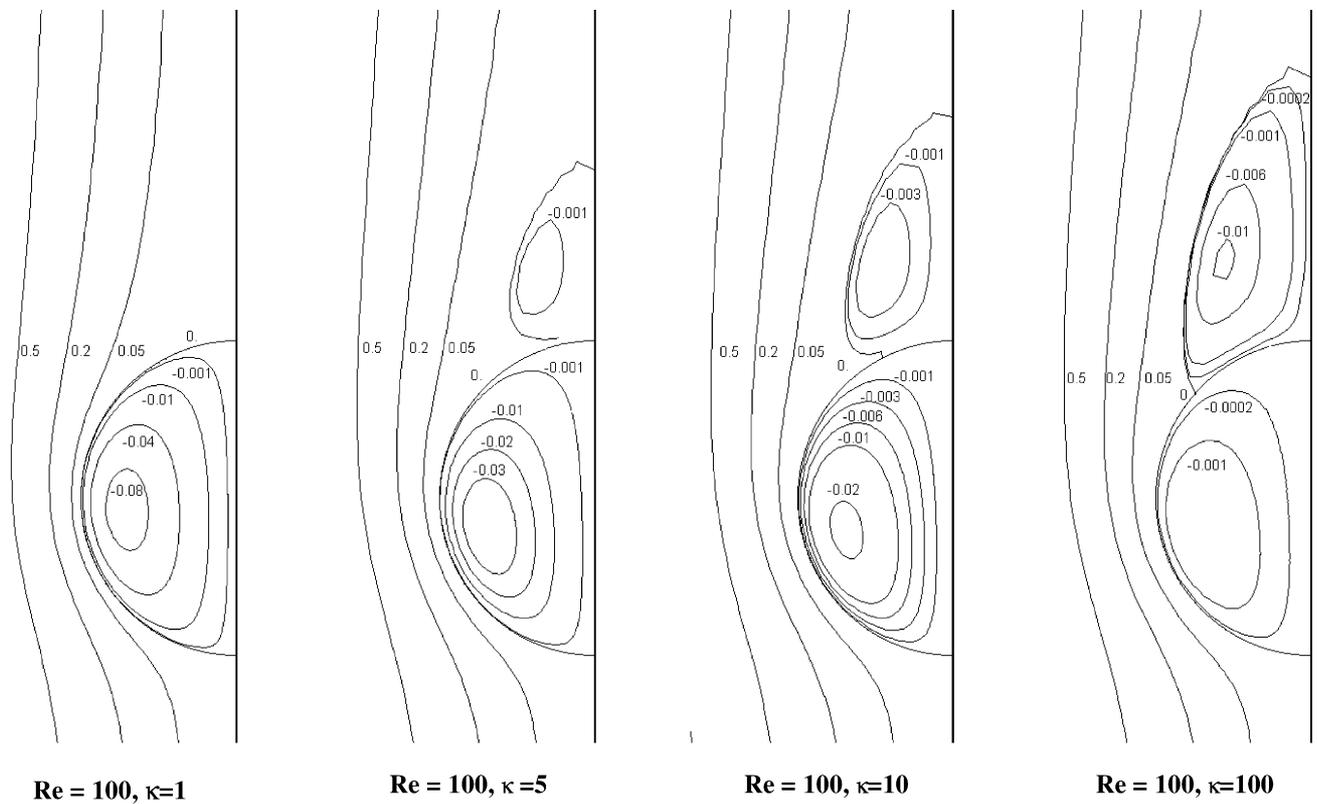


Fig. 2. Champs de fonction courant à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère fluide, $Re = 100$.

Sur la Fig. 1 nous avons représenté les lignes de courant à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère fluide pour deux nombres de Reynolds ($Re = 30$ et 50) et deux rapports des viscosités ($\kappa = 0.3$ et 100). Les Figs. 2 and 3 montrent les lignes de courant à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère fluide pour deux nombres de Reynolds ($Re = 100$ et 300) et plusieurs valeurs du rapport des viscosités ($\kappa = 1, 5, 10$ et 100). Pour les faibles rapports des viscosités, il s'avère que la circulation interne est suffisamment rapide pour empêcher la formation d'une recirculation à l'arrière de la sphère, et une petite asymétrie existe entre les régions amont et aval près de la sphère. Tandis que pour les rapports des viscosités élevés les figures montrent une région de recirculation à l'arrière de la sphère. A partir des Figs. 1–3, on peut constater que la longueur du recollement et l'angle de séparation augmentent quand le nombre de Reynolds ou le rapport des viscosités augmente.

Les profils de vorticité et de vitesse à la surface de la sphère pour deux nombres de Reynolds ($Re = 30$ et 300) et une large gamme des rapports des viscosités ($\kappa = 0$ à 1000)

sont tracés en fonction de la coordonnée angulaire θ dans les Figs. 4–7. A partir de ces figures, on peut noter qu'à l'exception de la région près du point de stagnation à l'arrière de la sphère, le rotationnel et la vitesse dépendent fortement du nombre de Reynolds et du rapport des viscosités. En effet, pour un rapport de viscosité fixe, le rotationnel et la vitesse croissent avec le nombre de Reynolds, alors que la diminution de κ est accompagnée pour un Re fixe d'une réduction du rotationnel et de l'augmentation simultanée de la vitesse à la surface de la sphère.

Dans le cas $\kappa = 0$, les distributions du rotationnel et de la vitesse à la surface de la sphère sont presque symétriques par-rapport à l'équateur pour tous les nombres de Reynolds étudiés ici, ils deviennent de plus en plus asymétriques quand κ augmente. Dans les cas $\kappa = 0, 0, 3$ et 1 , aucune recirculation n'est prévue. D'autre part pour $\kappa = 5, 10$ et 100 , le rotationnel change de signe indiquant la présence d'une recirculation à l'arrière de la sphère. Par exemple, dans le cas $\kappa = 100$, l'angle de séparation passe de 152° à $Re = 30$ à 110° à $Re = 300$. En raison de la valeur élevée du rapport

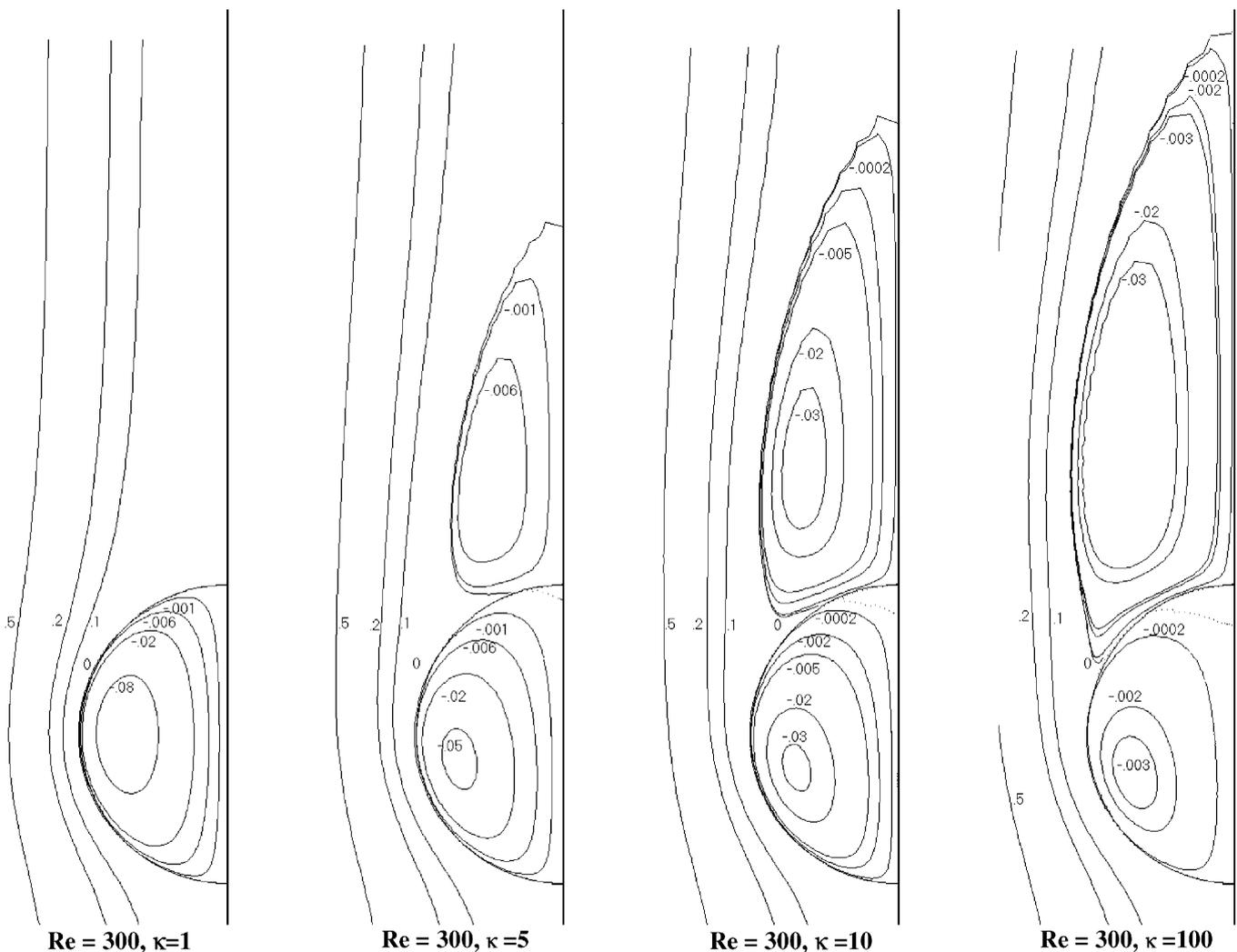


Fig. 3. Champs de fonction courant à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère fluide, $Re = 300$.

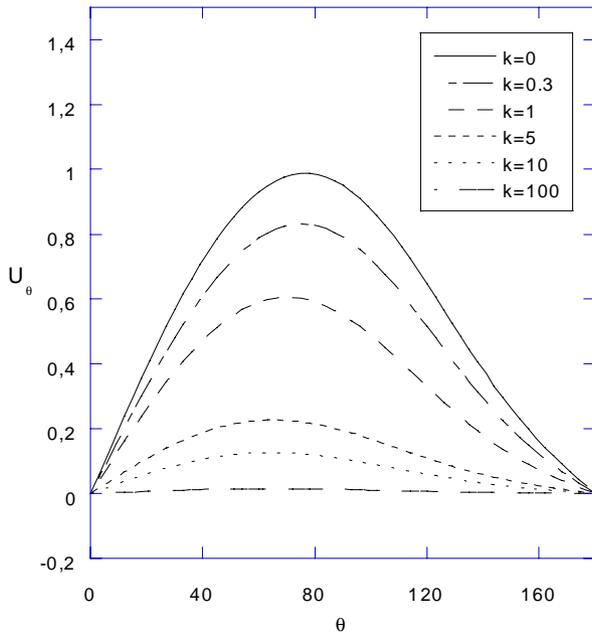


Fig. 4. Influence du rapport des viscosités sur le profil du rotationnel à l'interface de la sphère fluide, $Re = 30$.

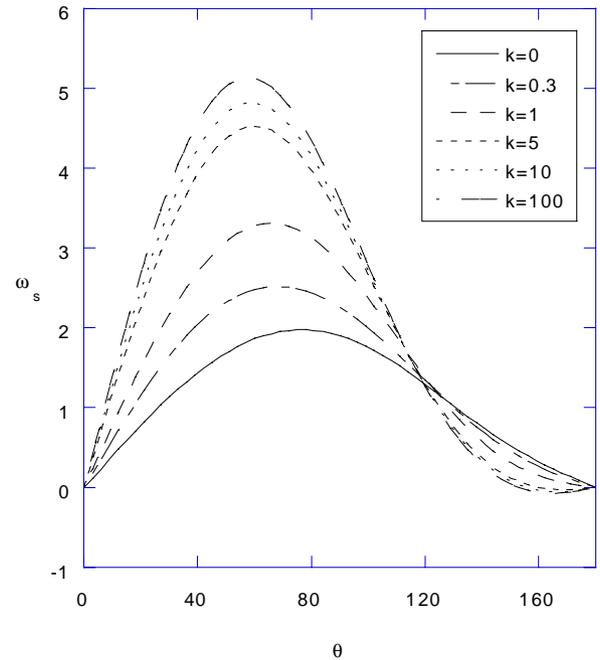


Fig. 5. Influence du rapport des viscosités sur le profil du rotationnel à l'interface de la sphère fluide, $Re = 30$.

des viscosités, ces valeurs sont très proches de celles d'une sphère rigide pour laquelle l'angle de séparation passe de 153° à $Re = 30$ à 111° à $Re = 300$ (Clift et al. [1]).

Pour les nombres de Reynolds élevés, l'effort exercé par la circulation est suffisant pour contrecarrer le mouvement

arrière du vortex dans la sphère fluide et le cisaillement résultant est suffisamment grand pour créer un petit vortex secondaire à l'intérieur de la sphère fluide, avec une circulation dans le sens opposé à celui du tourbillon principal.

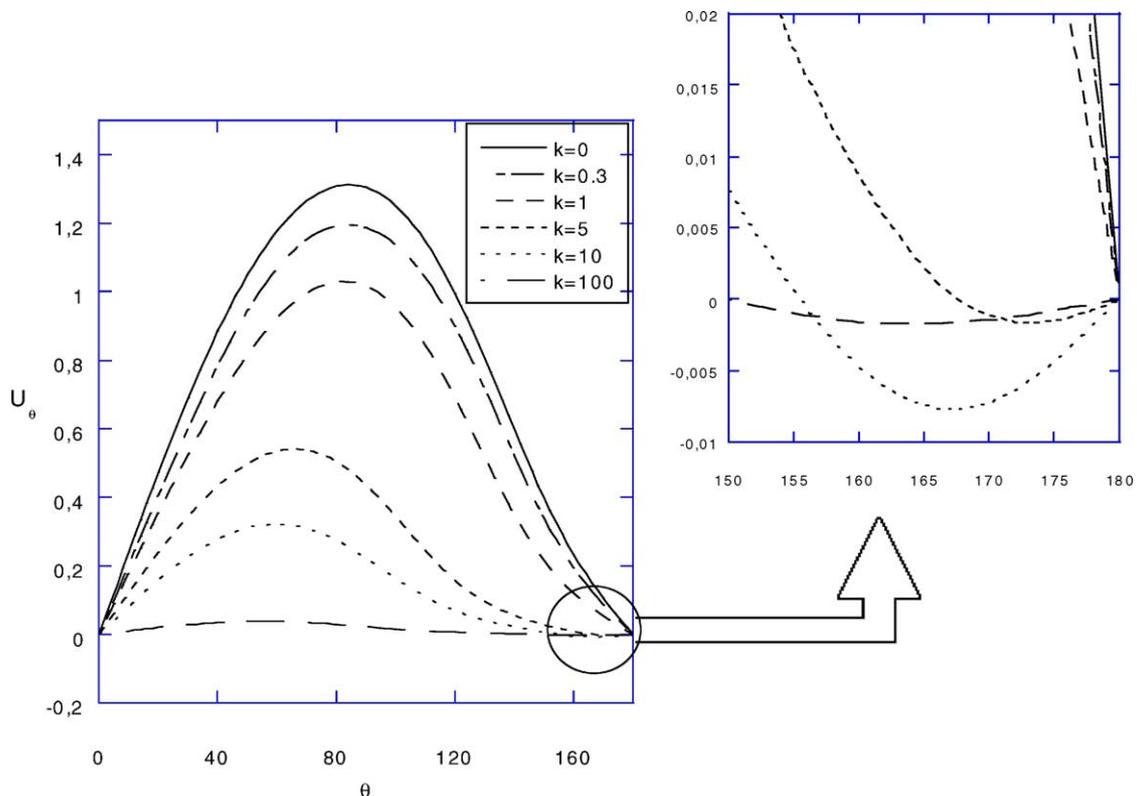


Fig. 6. Influence du rapport des viscosités sur le profil des vitesses tangentiels à l'interface de la sphère fluide, $Re = 300$.

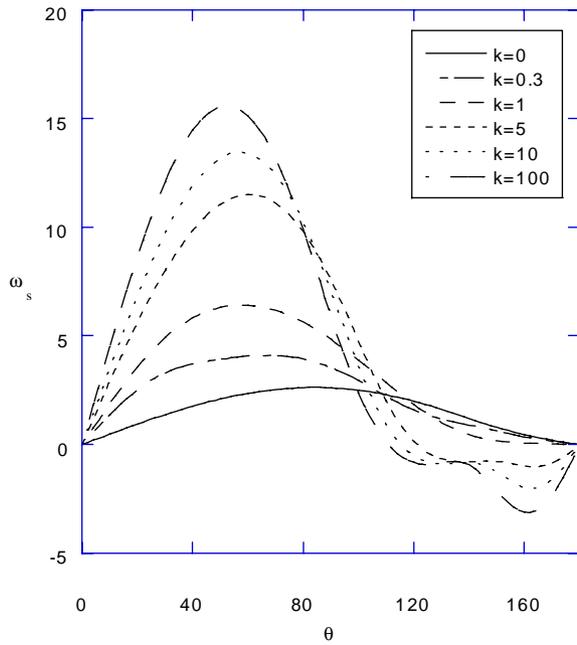


Fig. 7. Influence du rapport des viscosités sur le profil du rotationnel à l'interface de la sphère fluide, $Re = 300$.

Par exemple à $Re = 300$ et pour $\kappa = 5, 10$ et 100 (Fig. 4), la présence de valeurs négatives pour la vitesse interfaciale à l'arrière de la sphère indique la présence d'une telle recirculation secondaire à l'intérieur de la sphère fluide.

Les valeurs des coefficients de traînée issus de nos calculs sont regroupées dans le Table 3. On observe que le coefficient de traînée diminue au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente pour un rapport des viscosités fixe. Par ailleurs, pour un nombre de Reynolds fixe, le coefficient de traînée augmente au fur à mesure que le rapport des viscosités augmente et atteint une valeur limite correspondant au coefficient de traînée pour une particule sphérique rigide.

Pour présenter les résultats numériques sous une forme plus facile à utiliser, des équations empiriques qui donnent la variation du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds et du rapport de viscosité ont été proposées. Pour des nombres de Reynolds compris entre 0.5 et 200,

Table 3
Influence du rapport des viscosités κ sur le coefficient de traînée

Re	κ						
	0	0.3	1	5	10	100	1000
1	17.58	19.93	22.60	25.90	26.65	27.46	27.55
10	2.490	2.912	3.431	4.092	4.243	4.406	4.424
20	1.429	1.712	2.078	2.542	2.646	2.756	2.768
30	1.036	1.261	1.569	1.962	2.058	2.138	2.148
50	0.690	0.855	1.108	1.441	1.511	1.582	1.589
100	0.391	0.507	0.693	0.975	1.029	1.079	1.084
200	0.206	0.270	0.390	0.654	0.717	0.772	0.776
300	0.143	0.192	0.283	0.516	0.576	0.625	0.629
400	0.108	0.151	0.226	0.432	0.489	0.531	0.534

Rivkind et Ryskin [22] ont proposé la corrélation suivante

$$C_d = \frac{1}{1 + \kappa} \left[\kappa \left(\frac{24}{Re} + 4Re^{-1/3} \right) + 14.9Re^{-0.78} \right] \quad (10)$$

Oliver et Chung [17] ont obtenu une équation qui lisse bien leurs résultats numériques pour des faibles nombres de Reynolds ($0 < Re < 2$):

$$C_d = C_{d_{cf}} + 0.4 \left(\frac{3\kappa + 2}{1 + \kappa} \right)^2 \quad (11)$$

où $C_{d_{cf}}$ est le coefficient de traînée pour l'écoulement rampant (Hadamard et Rybczinski),

$$C_{d_{cf}} = \frac{8}{Re} \frac{3\kappa + 2}{1 + \kappa} \quad (12)$$

Dans le même esprit que les études précédentes, nous avons cherché à corréler nos résultats numériques par une équation qui serait valable à la fois pour les faibles nombres de Reynolds et pour les grands nombres de Reynolds, ceci quel que soit le rapport des viscosités. L'équation retenue est la suivante:

$$C_d = \frac{(\kappa(24/Re + 4/Re^{0.36}) + 15/Re^{0.82} - 0.02\kappa Re^{0.5}) / (1 + \kappa) Re^2 + 40(3\kappa + 2)/Re + 15\kappa + 10}{(1 + \kappa)(5 + 0.95Re^2)} \quad (13)$$

Cette formule donne des valeurs du coefficient de traînée qui coïncident avec celles calculées numériquement avec une erreur n'excédant pas 7% pour toute la gamme $Re < 400$ et $0 < \kappa < 1000$.

Des valeurs des coefficients de traînée issus de l'Eq. (13) sont reportées dans le Table 4 et comparées à celles des résultats issus des corrélations de Rivkind et de Ryskin [22], Oliver et Chung [17] et de Hadamard [7] et Rybczinski [8] pour des nombres de Reynolds inférieurs à 400 et un rapport des viscosités $\kappa = 1$.

A partir du Table 4, on peut constater que nos résultats numériques sont en bon accord avec les résultats numériques de Rivkind et Ryskin [22] pour les nombres de Reynolds compris entre 1 et 200. On voit également que les résultats issus de la corrélation que nous proposons (Eq. (13)) sont bien conformes à ceux des corrélations de Hadamard–Rybczinski et Oliver et Chung (Eqs. (11) and (12)) pour les faibles nombres de Reynolds d'une part et qu'ils sont en bon accord avec les résultats numériques d'autre part. Le Table 4 montre aussi que la corrélation de Rivkind et Ryskin (Eq. (10)) sous-estime de manière significative les valeurs du coefficient de traînée pour les faibles nombres de Reynolds. Le cas $\kappa = 1$ est donné à titre d'exemple, mais il est très facile de confirmer ces diverses observations pour n'importe quelle autre valeur du rapport des viscosités (en comparant les différentes corrélations). De ce qui précède, il ressort que la corrélation que nous proposons est plus précise et plus générale que les corrélations proposées antérieurement. Cette information

Table 4

Valeurs du coefficient de traînée C_d , obtenues à partir des corrélations et des résultats numériques ($\kappa = 1$)

<i>Re</i>	Auteurs					
	Hadamard [7] et Rybczynski [8] (Eq. (3))	Oliver et Chung [17] (Eq. (2))	Rivkind et Ryskin [22] (Eq. (1))	Ce travail (Eq. (13))	Rivkind et al. [23] (résultats numériques)	Ce travail (résultats numériques)
0.1	200.0	202.5	169.2	202.4	–	206.0
1	20.00	22.50	21.45	22.52	22.40	22.60
2	–	12.50	11.93	12.46	12.10	12.14
5	–	–	5.693	5.924	5.650	5.698
10	–	–	3.364	3.417	3.330	3.431
20	–	–	2.056	2.020	2.050	2.078
30	–	–	1.568	1.506	–	1.569
50	–	–	1.135	1.053	1.120	1.108
100	–	–	0.756	0.656	0.740	0.693
200	–	–	0.521	0.404	0.430	0.390
300	–	–	0.425	0.294	–	0.283
400	–	–	0.371	0.227	–	0.226

devrait être d'un certain intérêt pour l'étude des systèmes dispersés (liquide–liquide, gaz–liquide ou solide–liquide) et plus particulièrement pour la conception des contacteurs liquide–liquide dans le domaine du Génie Chimique comme l'extraction liquide–liquide ou les échangeurs à contact direct.

References

- [1] R. Clift, J.R. Grace, M.E. Weber, *Bubbles, Drops and Particles*, Academic Press, New York, 1978.
- [2] B. Caussade, A. Saboni, in: S.E. Schwartz, W.G.N. Slinn (Eds.), *Precipitation Scavenging and Atmosphere-Surface Exchange*, vol. 1, Hemisphere Publishing Corp., Washington, USA, 1992, p. 29.
- [3] H. Amokrane, A. Saboni, B. Caussade, *AIChE J.* 40 (1994) 1950.
- [4] R.S. Alassar, H.M. Badr, H.A. Mavromatis, *Int. J. Heat Mass Transfer* 42 (1999) 1289.
- [5] Z.G. Feng, E.E. Michaelides, *Int. J. Heat Mass Transfer* 43 (2000) 219.
- [6] S.S. Sadhal, P.S. Ayyaswamy, J.N.C. Chung, *Transport Phenomena with Drops and Bubbles*, Springer, Berlin, 1996.
- [7] J. Hadamard, *C. R. Acad. Sci.* 152 (1911) 1735.
- [8] W. Rybczynski, *Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett., CI. Sci. Nat. Ser. A* (1911) 40.
- [9] Y. Rimon, I. Cheng, *Phys. Fluids* 12 (1969) 949.
- [10] B.P. Leclair, A.E. Hamielec, H.R. Pruppacher, *J. Atmos. Sci.* 27 (1970) 308.
- [11] S.C.R. Dennis, J.D.A. Walker, *J. Fluid Mech.* 48 (1971) 771.
- [12] B. Forenberg, *J. Fluid Mech.* 190 (1988) 471.
- [13] R.S. Alassar, H.M. Badr, R. Allayla, *Comput. Mech.* 26 (2000) 409.
- [14] D.C. Brabston, H.B. Keller, *J. Fluid Mech.* 69 (1975) 179.
- [15] B.P. Leclair, A.E. Hamielec, *Can. J. Chem. Eng.* 49 (1971) 713.
- [16] G. Ryskin, L.G. Leal, *J. Fluid Mech.* 148 (1984) 1.
- [17] D.L.R. Oliver, I.N. Chung, *J. Fluid Mech.* 177 (1987) 1.
- [18] J. Magnaudet, M. Rivero, J. Fabre, *J. Fluid Mech.* 287 (1995) 97.
- [19] A. Blanco, J. Magnaudet, *Phys. Fluids* 7 (1995) 1265.
- [20] F. Raymond, Thèse de doctorat de l'École Centrale de Nantes, ED 82-129, 1995.
- [21] A.H. Abdel-Alim, A.E. Hamielec, *Ind. Eng. Chem. Fund* 14 (1975) 308.
- [22] V.Y.A. Rivkind, G.M. Ryskin, *Fluid Dyn.* 11 (1976) 5.
- [23] V.Y.A. Rivkind, G.M. Ryskin, G.A. Fishbein, *Appl. Math. Mech.* 40 (1976) 687.